el

fortoplano

al

finitaj elementoj

Matematika helpilo

- Prezentado de objektoj
  - Linearaj ekvacioj
- Vektora kaj tensora kalkulo
- Diferenciala geometrio

Prezentado de objektoj

a a a

Objekto

estas io, kiu ricevi nomon, minimume unu literon. Normale tiun nomo ne reprezentas unu elementon, sed aron da similaj obiektoj. El matematiko ni bone konas tian notacion - priskribo helpe de indeksoj: i, j, k, l ....

Indeksoj povas trovighi ie ajn, sube al supre de nomo.
Atenton! Supra indekso ne indikas potencigon!

i = 1, 2, 3

j = 0, 1, 2

r, l = 0,1

Oni povas klasifiki la obiektojn rilate je nombro de iliaj indeksoj - oni diras je valenco.

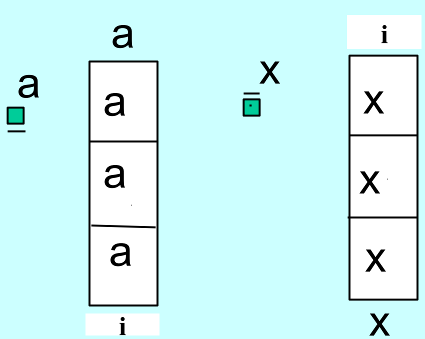
Valoron de indeksoj oni elektas nur kiel entjera nombro. La supra kaj suba limoj estas jam che komenco konataj. (Pro komputeraj aspektoj oni elektas suban limon ofte la nulo)

c

Valenco 0

Objekto 0-valenca ne posedas indekson. Ghi estas nur unu-elementa obiekto, kiu posedas nur nomon, ekz. q.

i = 1, 2, 3

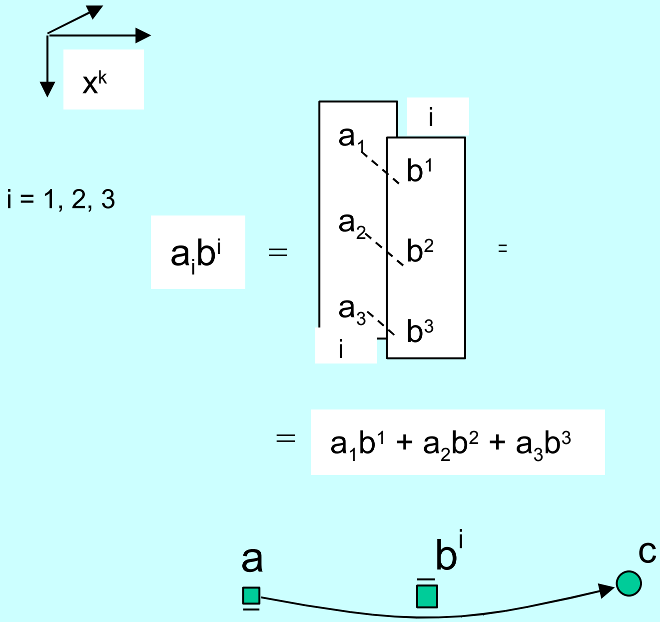


Valenco 1

Objekto 1-valenca posedas unu indekson. Oni povas konstrui du tipojn de tiaj obiektoj, kun suba au supra indekso.

Oni imagu, ke elementoj de tiuj obiektoj ordigitaj estas en linea au kolona tabelo.

Matematikaj rimedoj



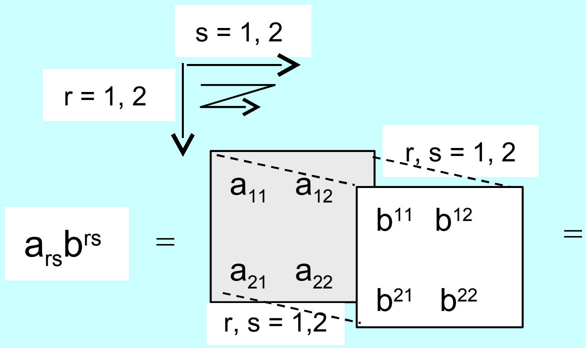
Ekzemploj

a) Koordinatoj x, y, z povas esti notitaj: x_k au x^k (k = 1, 2, 3)

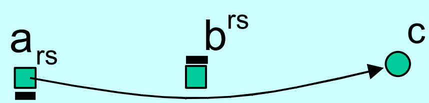
b) Helpe de indeksa notacio oni povas eviti simbolon de sumado, kio esence simplifigas kalkuladon.

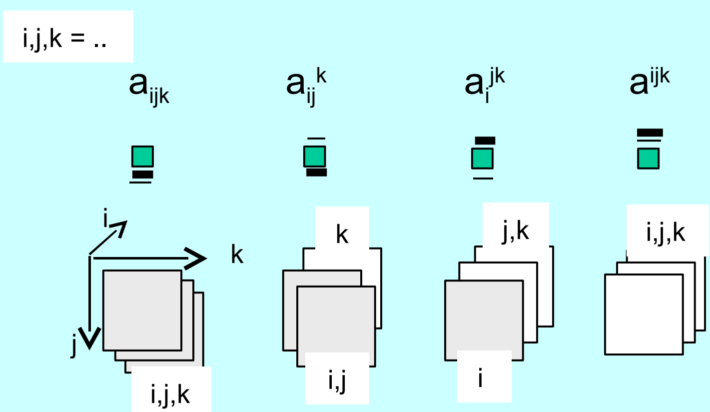
$$\Sigma a_k b^k = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3 = c$$

Multipliko de konformaj 1-valenciaj obiektoj videbla sur bildo.



$$= a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + + a_{21}b^{21} + a_{22}b^{22}$$





Valenco 2

Obiekto 2-valenca, kun du indeksoj, ebligas tri tipojn:

$$a_{rs}\ ,\quad a_{r}{}^{s}\ \text{au}\quad a^{rs}\,.$$

Facile konstati, ke por r,s = 1, 2, 3 chiu tipo posedas 9 elementoj. Oni povas ilin tabeligi kaj prezenti per grafikaj simboloj

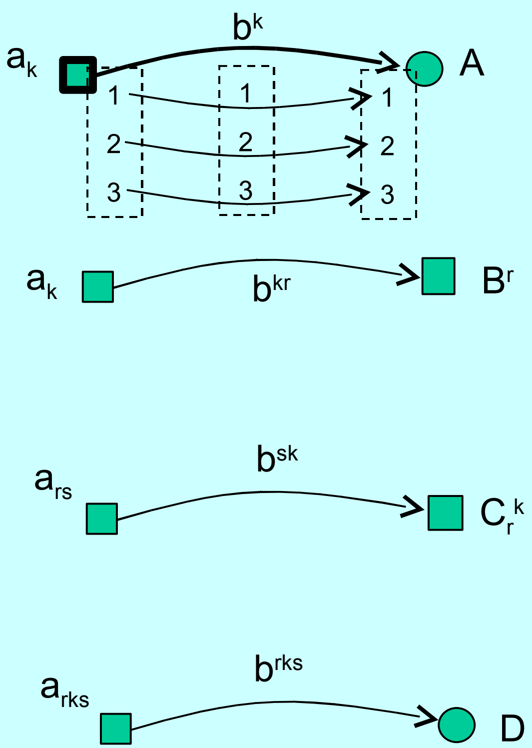
Multipliko de konformaj 2-valenciaj obiektoj videbla sur bildo.

Valenco 3, kaj pli alta

Simile oni povas konstrui objektojn tri-valenciajn da 4 tipoj:

$$a_{ijk}\ ,\quad a_{ij}{}^{k},\quad a_{i}{}^{jk}\ \text{au}\quad a^{ijk}.$$

Por i,j,k = 1, 2, 3 chiu obiekto posedas $3^3 = 27$ elementoj kaj povas esti prezentita per kubo.



Regulo de sumado

En analitika pritrakto de konstruteorioj helpe de vektor- kaj tensorkalkulo ofte aperas sumojn, kies notado povas esti simpligita pere sekvanta sumad-regulo (konvencio lau EINSTEIN) lau unu au pluraj indeksoj r, k, s = 1, 2 . . n

$$a_k b^k = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 = A$$

$$a_k b^{kr} = a_1 b^{1r} + a_2 b^{2r} + a_3 b^{3r} = B^r$$

$$a_{rs} b^{sk} = a_{r1} b^{1k} + a_{r2} b^{2k} + a_{r3} b^{3k} = C_r^{\ k}$$

Simile oni povas krei sumojn je pluraj indeksoj:

$$a_{ks} b^{ks} = a_{11} b^{11} + a_{12} b^{12} + a_{21} b^{21} + a_{22} b^{22} = D$$

$$\begin{aligned} a_{rks} b^{rks} = \; & a_{111} b^{111} + a_{112} b^{112} + \\ & + a_{121} b^{121} + a_{122} b^{122} + \\ & + a_{211} b^{211} + a_{212} b^{212} + \\ & + a_{221} b^{221} + a_{222} b^{222} = F \end{aligned}$$

$$a_{ks} x^k x^s = a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + a_{21} x^2 x^1 + a_{22} x^2 x^2 = G$$

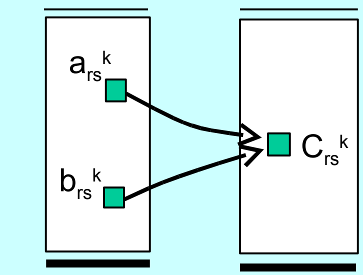
Tiu sumad-regulo validas nur por du samaj indeksoj!

Sumad-indeksoj (mutaj) povas esti anstatuigitaj per alia indekso:

$$a_k b^k = a_r b^r = a_i b^i \quad \text{ktp.}$$

Potenco devas esti skribita jene:

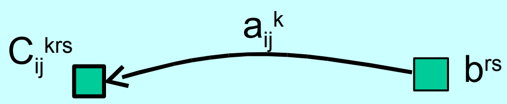
$$(a_k b^k)^2 = a_r b^r \cdot a_k b^k \quad \text{sed ne} \quad a_k b^k a_k b^k$$

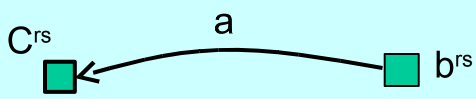


Sumo kaj produto de objektoj

Sumado estas realigebla nur je obiektoj, kiuj posedas la samajn valencon kaj indekso-dimension.

$$a_{rs}{}^{k} + b_{rs}{}^{k} = C_{rs}{}^{k} \qquad (r, s, k = 1, 2,3)$$





Produto de du obiektoj formas obiekton, kies valenco estas sumo de faktor-valencoj:

$$a_{ij}{}^{k} b^{rs} = C_{ij}{}^{krs}$$

$$a_{ij}{}^{k} b^{r} c^{s} = d_{ij}{}^{krs}$$

$$a b^{rs} = C^{rs}$$

La produt-elementojn oni formas multiplikante chiun elementon de unua obiekto per chiu elemento de dua obiekto.

Per multipliko de obiekton kun konstanto -1 oni povas realigi subtrahon de obiektoj pere sumado.

Kontrakcio de objektoj

Ni pritraktu obiekton kun subaj kaj supraj indeksoj, kies valenco estas minimume 2

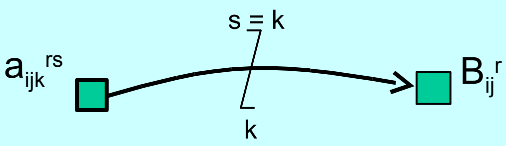
- ekzemple a_{ijk}^{rs} (je valenco 5)

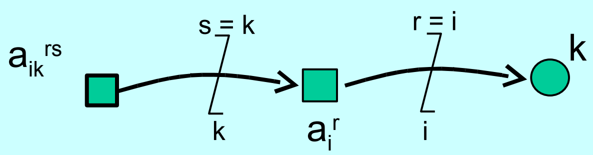
En kazo, kiam du indeksoj egalas, ekz. k = s, tiam ni ricevos obiekton

$$a_{ijk}^{rk}$$

kaj povas mallongigi ghin lau sumad-regulo; sekve ni ricevas obiekton je valenco 3, kaj por indekso k=1,2,3 rezultas:

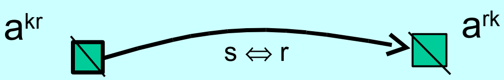
$$a_{ijk}^{rk} = \Sigma a_{ijk}^{rk} = a_{ij1}^{r1} + a_{ij2}^{r2} + a_{ij3}^{r3} = B_{ij}^{r}$$

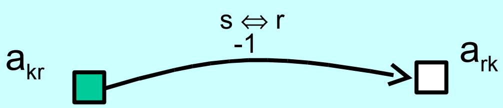


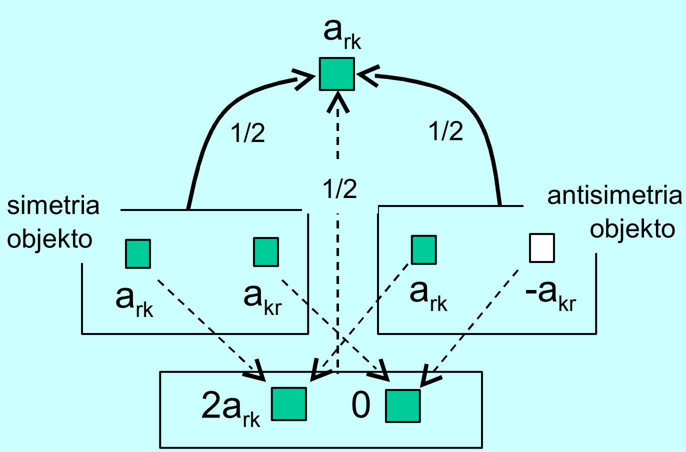


Rezulte de kontrakci-operacio la valenco de obiekto kuntirighas po 2.

Ripetado de kontrakci-operacioj por paraj indeksoj povas gvidi al obiekto de valenco 0, do al nevarianto / konstanto.







Objektoj simetria kaj antisimetria

Simetria obiekto je valenco 2 estas tiu, kies elementoj ne shanghighas post aliigo de du indeksoj

$$a_{rk} = a_{kr}\,, \qquad a^{rk} = a^{kr}$$

Absolute simetria estas obiekto se chiu permutacio de du supraj au subaj indeksoj ne shanghas valoron de elementoj:

$$a_{rsk} = a_{rks} = a_{krs} = a_{srk} = a_{skr} = a_{ksr}$$

Antisimetria obiekto shanghas valoron de elementoj je kontraua che aliigo de du indeksoj:

$$a_{rk} = -a_{kr}\,, \qquad a^{rk} = -a^{kr}$$

kie, por $r = k$ validas: $a_{kk} = 0, \quad a^{kk} = 0$

Absolute antisimetria estas obiekto se permutacio de du supraj au subaj indeksoj nur la antausigno shanghighas:

$$a_{rsk} = -a_{rks} = a_{krs} = -a_{srk} = a_{skr} = -a_{ksr}$$

(che para permutacio antausigno ne shanghighas, che nepara permutacio shanghighas antausigno de elementoj)

Ekzemplo

Objekto je valenco 2 Povas esti dispartigita je simetria kaj antisimetria obiektoj:

$$a_{rk} = (a_{rk} + a_{kr})/2 + (a_{rk} - a_{kr})/2$$

Specialaj objektoj

a) e-objekto

estu antisimetria objekto

$$e_{ijk} \quad \text{au} \quad e^{ijk}$$

kies elementoj valoras nur 0, +1, -1 nome:

$$e_{ijk} \ / \ e^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se lauvolaj du indeksoj egalas} \\ +1 & \text{se indeksoj igas paran permutacion} \\ -1 & \text{se indeksoj igas neparan permutacion} \end{cases}$$

a) δ-objekto

Produto de objektoj e_{ijk} kaj e^{rst} formas miksobjekton je valenco 6

$$\delta_{ijk}{}^{rst} = e_{ijk}e^{rst}$$

b) KRONECKER-simboloj

Difino: $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^{\,j} = 1$, nur por i = j , alikaze = **0**

Por KRONECKER-simboloj validas:

$$\delta_i^{\,j}\,\delta_j^{\,k} = \delta_i^{\,k} \qquad\qquad \delta_{ij}\,\delta^{jk} = \delta_i^{\,k}$$

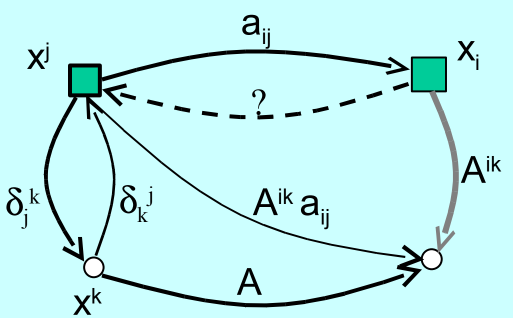
kaj ili permesas anstataui indeksojn:

$$a_r\delta_j^{\,r} = a_j \qquad\qquad a^i\delta_i^{\,r} = a^r$$

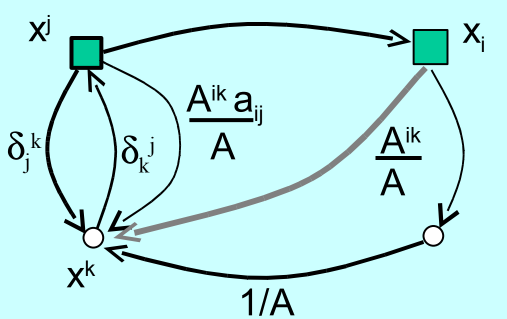
$$a_{rs}\delta_i^{\,r} = a_{is} \qquad\qquad \delta_i^{\,r}\,a^{is} = a^{rs}$$

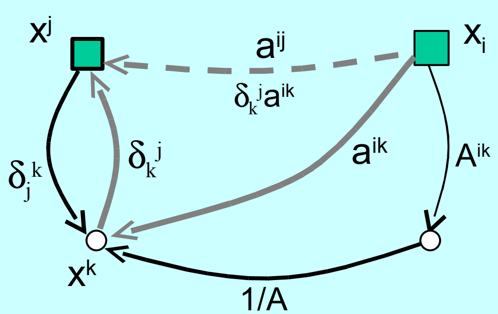
Donitaj estas du objektoj: x_i kaj x^j
- kunligitaj per linearaj ekvacioj

Trovu inversigon de tiu relacio!



Determinanto A dispartigita je minoroj.
Inversigu branchon A , poste branchon a_{ij}





Linearaj ekvacioj

Ekzemple, tradicie notita linearaj ekvacioj

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{10}$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_{20}$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = a_{30}$$

povas esti prezentataj helpe de indeksitaj objektoj jene:

$$a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = x_1$$
$$a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 = x_2$$
$$a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 = x_3$$

au

$$a_{ij}x^j = x_i$$

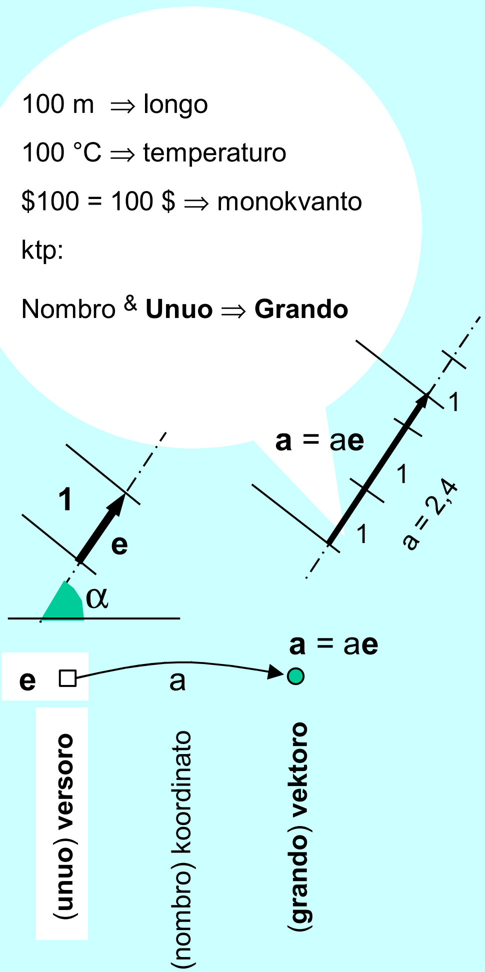
kaj solvo de tiu ekvaciaro posedas simplan formon:

$$x^j = a^{ij}x_i$$

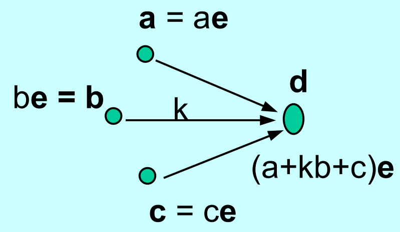
kie $\quad a^{ij} = (A^{ij}/A)$

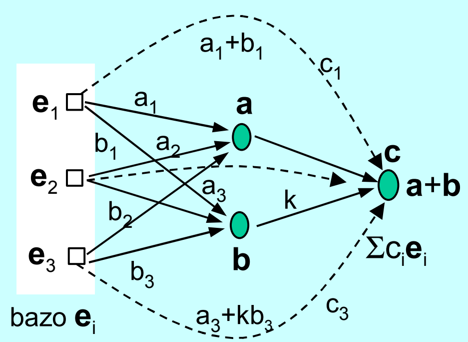
determinanto $A = |a_{ij}| = 0$, $\quad A^{ij}$ - minoro de elemento a_{ij}

Vektor-kalkulo

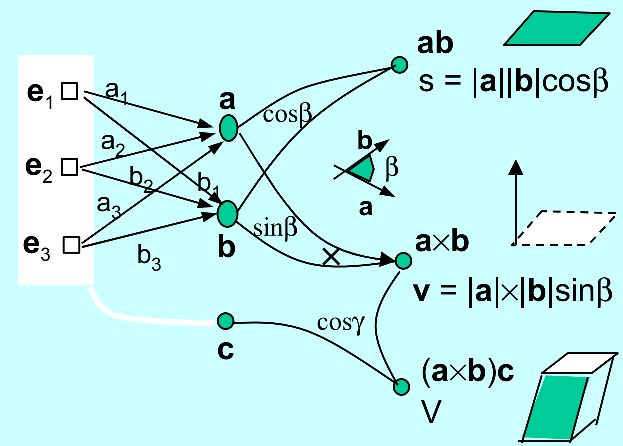


Difino de vektoro





Sumo de vektoroj



Produtoj de vektoroj